Álgebra Linear

Aula 01: Introdução

Kelvin Rafael Duarte Machado

setembro de 2025

O que é Álgebra Linear?

É o ramo da matemática cujo objeto de estudo são os vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e sistemas de equações lineares.

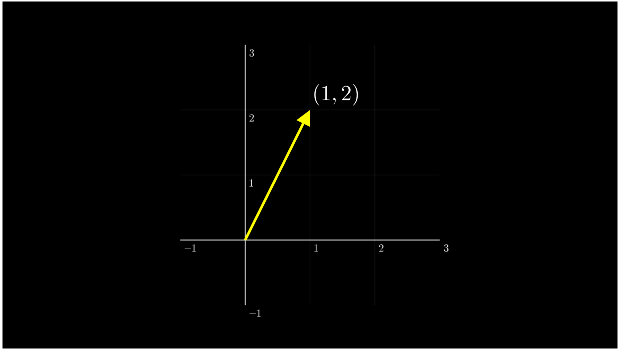
Onde a Álgebra Linear é importante?

- Ciências da computação: essencial na inteligência artificial, machine learning, processamento de imagens e computação gráfica;
- Engenharia: Usada na análise estrutural, processamento de sinais e robótica;
- Física: Fundamental para compreender fenômenos em diversas áreas desde a mecânica até a teoria de campos;
- Finanças: Aplicada para modelagem de sistemas e análise de dados complexos.

Vetores

Vetores são segmentos de reta orientados, usados na matemática e na física para representar grandezas que possuam módulo (intensidade), direção e sentido.

Exemplo de um vetor em $\mathbb{R}^2$



Sistema de equações lineares

É um conjunto finito de equações lineares aplicadas a um mesmo conjunto, igualmente finito de variáveis, onde a solução para o sistema é uma atribuição de números às incógnitas que satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema.
Exemplo básico:

$$\begin{cases} x + 3y & = & 1 \\ 2x - y & = & -2 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, resolvemos a equação superior para x em termos de y:
$x = 1 - 3y$
Agora, substituindo essa expressão para x na equação inferior:

$$2(1 - 3y) - y = -2$$

Isto resulta em uma equação envolvendo apenas a variável y. Resolvendo, obtemos $y = 4/7$ e ao substituir este valor de y, encontramos a variável $x = -5/7$.

Sistemas de equações lineares

A forma geral de escrever um sistema de equações lineares é:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ são os coeficientes do sistema e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são os termos constantes.

Vetores como combinações lineares

A relação entre vetores e sistemas de equações lineares é intrínseca, já que um sistema de equações lineares pode ser expresso como a combinação linear de vetores, onde os vetores e os coeficientes se relacionam diretamente com as incógnitas do sistema.
Encontrar a solução de um sistema de equações lineares equivale a determinar os escalares que formam uma combinação linear específica de vetores.
Uma combinação linear de vetores é uma soma de múltiplos desses vetores, onde os múltiplos são escalares (números).

$$v = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \cdots + a_n \vec{v_n}$$

Forma matricial

Uma forma extremamente útil de representar um sistema de equações lineares é através da forma matricial, em que a equação descrita anteriormente pode ser representada da seguinte forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

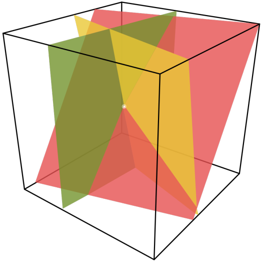
Onde A é uma matriz *mxn*, $\mathbf{x}$ é um *vetor coluna* com n elementos e $\mathbf{b}$ é um *vetor coluna* com m elementos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistema de equações lineares: interpretação geométrica

Um sistema de equações lineares pode ser interpretado como objetos geométricos (retas em 2D ou planos em 3D) em um gŕafico, e a solução do sistema correspondente aos pontos de intersecção desses objetos.

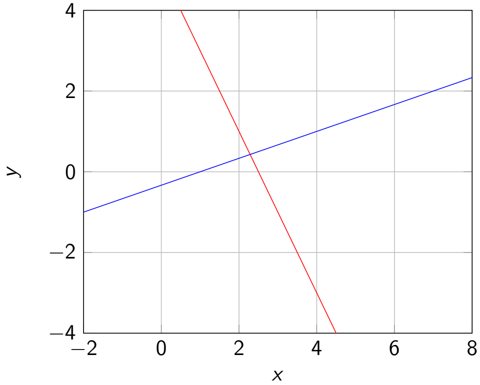
Representação da interseção de 3 planos (solução de um sistema de 3 incógnitas):



Sistema de equações lineares possível e determinado

Exemplo:

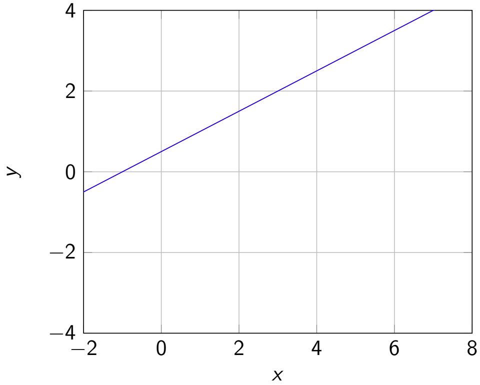
$$\begin{cases} 2x + y &= 5 \\ x - 3y &= 1 \end{cases}$$



Sistema de equações lineares possível e indeterminado

Exemplo:

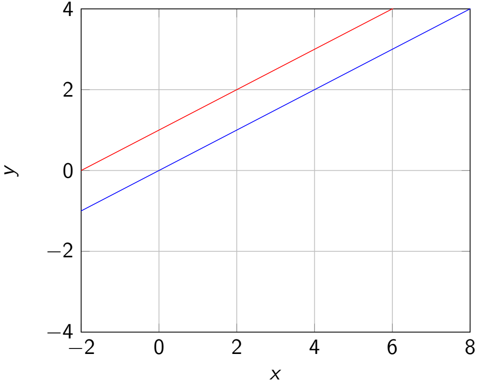
$$\begin{cases} -x + 2y & = & 1 \\ 3x - 6y & = & -3 \end{cases}$$



Sistema de equações lineares imposível

Exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y & = & 2 \\ 2x - 4y & = & 0 \end{cases}$$



Solução computacional de um sistema de equações lineares

Resolução do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 15 \\ x + y + 3z = 27 \\ 2x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

python™

```
[1]: import numpy as np

[2]: A = np.array([[1, -3, 1],
                   [1, 1, 3],
                   [2, 3, -4]])

[3]: b = np.array([[15], [27], [2]])

[4]: x = np.linalg.solve(A,b)

[5]: print(x)

[[10.9047619 ]
 [ 0.38095238]
 [ 5.23809524]]
```

GNU Octave

Command Window

```
>> A = [1, -3, 1; 1, 1, 3; 2, 3, -4];
>> b = [15; 27; 2];
>> x = linsolve(A, b);
>> disp(x)
   10.9048
    0.3810
    5.2381
>> |
```

Solução computacional de um sistema de equações lineares

- Eliminação de Gauss
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Decomposição LU
- Decomposição QR
- Decomposição de Cholesky

Em breve...