

Álgebra Linear

Aula 02: Espaços vetoriais, Subespaço vetorial, Base e Dimensão

Kelvin Rafael Duarte Machado

setembro de 2025

Espaços vetoriais são conjuntos cujos elementos são chamados vetores, no qual são definidas duas operações: a *adição*, na qual para cada par de vetores u e v faz corresponder um terceiro vetor $u + v \in E$ chamado soma de u e v e a *multiplicação* por um número real, $\alpha \in \mathbb{R}$ por $v \in E$, que faz corresponder o vetor $\alpha.v = \alpha v$. Essas operações devem satisfazer para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, os axiomas apresentados a seguir:

Axiomas do espaço vetorial

- **comutatividade:** $u + v = v + u$;
- **associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- **vetor nulo:** existe um vetor $0 \in E$ chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para quaisquer $v \in E$;
- **inverso aditivo:** dado um vetor $v \in E$, existe um vetor $-v \in E$, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
- **distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- **multiplicação por 1:** $1.v = v$.

Exemplos de espaços vetoriais

- O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$
- O conjunto $\mathbb{R}^n$
- O conjunto das matrizes reais $m \times n$ denotado $M_{m \times n}(\mathbb{R})$
- O conjunto das funções $(F) = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Subespaço vetorial

Um subespaço de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:

- $0 \in F$;
- Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;
- Se $v \in F$, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Uma combinação linear de um conjunto de vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ é um vetor na forma:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Onde: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Subespaço gerador (span)

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \dots, v_n$ em V é chamado de subespaço gerador de V ou, span de V , denotado por $S(v_1, \dots, v_m)$. Em outras palavras:

$$S(v_1, \dots, v_m) = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m : a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}$$

Vetores linearmente independentes

Seja E um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $X \subset E$ é linearmente independente (L.I.), quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X . Se um conjunto X é linearmente independente no espaço E e $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$ com $v_1, \dots, v_m \in X$ então $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$. Sejam $v_1, \dots, v_m /$ vetores não nulos do espaço vetorial E . Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores ou posteriores, então o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é L.I..

Uma base de um espaço vetorial E é um conjunto $B \subset E$ linearmente independente que gera E .

Assim, todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ de elementos $v_1, \dots, v_m$ da base B . Se $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ é uma base de E e $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$, então os números $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são chamados *coordenadas do vetor v na base B* .

Base canônica

Os vetores:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Constituem um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^n$, linearmente independentes, sendo, portanto, uma base deste espaço.

Diz-se que o espaço vetorial E tem dimensão finita quando admite uma base $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E , chama-se a *dimensão* do espaço vetorial E : $n = \dim E$.

Exemplos:

- $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial com $\dim = 2$.
- Os monômios $1, x, \dots, x^n$ constituem uma base do espaço vetorial P_n dos polinômios de grau $\leq n$, logo P_n tem dimensão finita e $\dim P_n = n + 1$

Manipulação computacional de arrays

A implementação computacional da Álgebra Linear é beneficiada pela forma matricial, onde cada elemento é guardado na memória em um endereço específico, de acordo com o tipo de dado utilizado.

Vamos verificar através do Numpy e do SymPy como operar com matrizes.

