Álgebra Linear

Aula 03: Transformações lineares

Kelvin Rafael Duarte Machado

setembro de 2025

Transformação linear

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma transformação linear $A : E \to F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $A(v) = A \cdot v = Av \in F$ de modo que valham para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:

$$A(u + v) = Au + Av,$$

$$A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Av$$

O vetor Av chama-se a imagem de v pela transformação A.
As transformações lineares $A : E \to E$ do espaço vetorial E em si mesmo são chamadas *operadores lineares* em E.
Por sua vez, as transformações lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}$, com valores numéricos, são chamados *funcionais lineares*.

Núcleo e imagem

A imagem de A é o subconjunto $Im(A) \subset F$, formado por todos os vetores $w = Av \in F$ que são imagens de elementos de E pela transformação A.
O núcleo da transformação $A : E \to F$ é o subconjunto $N(A)$ dos vetores $v \in E$ tais que $Av = 0$.

Forma matricial

$$Av_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{n=1}^{m} a_{ij}w_i$$

Assim, a transformação linear $A : E \to F$ juntamente com as bases $V \subset E$ e $W \subset F$ determinam uma matriz $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(m \times n)$ chamada a matriz de A relativamente a essas bases (ou nas bases V, W)

$$Av_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Transformações matriciais

Um sistema de equações lineares pode ser escrito na forma de matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplos:

- Transformação do $\mathbb{R}^4$ para o $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Transformação nula

$$A_0(\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Operador identidade

$$A_1(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Operadores de rotação, reflexão e projeção

- Rotação pelo ângulo θ

$$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Reflexão no eixo y

$$A(x, y) = (-x, y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão no eixo x

$$A(x, y) = (x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Projeção ortogonal sobre o eixo x

$$A(x, y) = (x, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operadores de dilatação, contração e cisalhamento

- Contração de fator k em $\mathbb{R}^2$

$$(0 \leq k \leq 1)$$

- Dilatação de fator k em $\mathbb{R}^2$

$$k > 1$$

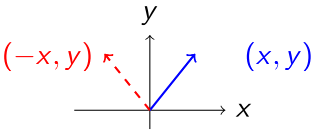
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

- Cisalhamento de $\mathbb{R}^2$ de fator k na direção x

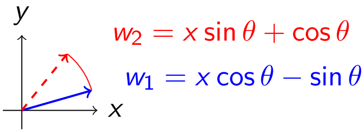
$$A(x, y) = (x + ky, y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

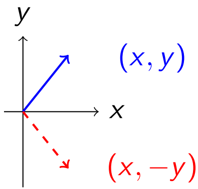
Transformações em $\mathbb{R}^2$



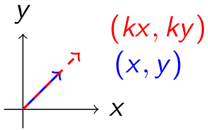
Reflexão em y



Rotação



Reflexão em x



Dilatação

Espaço dual

Escreve-se E^* em vez de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ para representar o conjunto das transformações lineares do espaço vetorial E em $\mathbb{R}$ e o conjunto E^* representa os funcionais lineares $\varphi : E \to \mathbb{R}$, chamando-se o espaço vetorial *dual* de E.

Vetor É um elemento do espaço vetorial E. Pode ser interpretado como uma grandeza geométrica ou física que possui direção e magnitude.

Covetor É um elemento do espaço dual E^*. Ele atua como uma aplicação linear que associa a cada vetor um número real.

Usualmente, vetores são representados na forma matricial em colunas, enquanto os covetores aparecem na forma matricial em linhas (ou seja, na forma transposta).