Álgebra Linear

Aula 04: Matrizes

Kelvin Rafael Duarte Machado

setembro de 2025

Matriz relativa a bases

Já vimos que uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fica inteiramente determinada pela matriz $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(m \times n)$, cujo ij-ésimo termo a_{ij} é a i-ésima coordenada do vetor $A \cdot e_j \in \mathbb{R}^m$.
Conhecendo essa matriz tem-se, para cada $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, o valor $A \cdot v = y_1, \ldots, y_m$ dado por:

$$y_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita e $A : E \to F$ uma transformação linear. Fixadas bases $V = v_1, \ldots, v_n \subset E$ e $W = w_1, \ldots, w_m \subset F$, para cada $j = 1, \ldots, n$ o vetor Av_j se exprime como combinação linear dos vetores da base W.

$$Av_j = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$$

Matriz de um operador linear

No caso em que $A : E \to E$ é um operador linear considera-se apenas uma base $V = v_1, \ldots, v_n \subset E$ e a matriz $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ do operador A relativamente à base V (ou na base V) é definida pelas n igualdades:

$$Av_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Neste caso, $\mathbf{a} \in M(n \times n)$ é a matriz quadrada $n \times n$ cuja j-ésima coluna é formada pelas coordenadas do vetor

$$Av_j = a_{1j} v_1 + \ldots a_{nj} v_n$$

na base V.

Operações matriciais

Entre as transformações lineares, além das operações de soma $A + B$ e de multiplicação por escalar αA, existe também a multiplicação BA.
Mas antes, precisamos definir o *produto interno*.
Sejam $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. O *produto interno* de u por v é definido como o número:

$$\langle u, v \rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n.$$

Sejam $\mathbf{b} = [b_{ij}] \in M(m \times n)$ e $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(n \times p)$ matrizes tais que o número de colunas de $\mathbf{b}$ é igual ao número de linhas de $\mathbf{a}$. O produto da matriz $\mathbf{b}$ pela matriz $\mathbf{a}$ é a matriz $\mathbf{ba} = \mathbf{c} = [c_{ij}] \in M(m \times p)$, cujo ij-ésimo elemento

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$$

é o produto interno do i-ésimo vetor-linha de $\mathbf{b}$ pelo j-ésimo vetor-coluna de $\mathbf{a}$

Matriz identidade

Representamos a matriz identidade com o símbolo $\mathbf{I}$.
Tem-se $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$ onde δ é o símbolo de Kronecker, onde são válidas as seguintes características:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

As propriedades abaixo são decorrentes de outras já apresentadas:

1. $(\mathbf{cb})\mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{ba})$
2. $\mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ca} + \mathbf{cb}$
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{b}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{ba})$
5. Uma matriz $\mathbf{a}$ chama-se invertível quando é quadrada e existe uma matriz $\mathbf{a}^{-1}$, chamada inversa de $\mathbf{a}$, tal que $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{I}$

Exemplos de operações

- Soma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 11 & 11 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 \\ -5 & 10 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & -1+4 & \pi+1 & 0+9 \\ 11+(-5) & 11+10 & -2+2 & 0+1 \\ 9+(-3) & 0+8 & 4+0 & 4+(-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi+1 & 9 \\ 6 & 21 & 0 & 11 \\ 6 & 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação por escalar

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 9 \\ -5 & 10 & 2 & 11 \\ -3 & 8 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 9 \\ 5 \cdot -5 & 5 \cdot 10 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 11 \\ 5 \cdot -3 & 5 \cdot 8 & 5 \cdot 0 & 5 \cdot -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 5 & 45 \\ -25 & 50 & 10 & 55 \\ -15 & 40 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

Exemplos de operações

- Multiplicação de matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} (3 \cdot 6 + 2 \cdot 0) & (3 \cdot 4 + 2 \cdot 7) & (3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)) \\ (5 \cdot 6 + (-5) \cdot 0) & (5 \cdot 4 + (-5) \cdot 7) & (5 \cdot (-2) + (-5) \cdot (-2)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 18 & 26 & -10 \\ 30 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos de operações

- Matriz inversa

  Pela propriedade $\mathbf{aa}^{-1} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a_{11} + 1a_{21} & 3a_{12} + 1a_{22} \\ 5a_{11} + 2a_{21} & 5a_{12} + 2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Resolvendo o sistema linear:

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$