

Introdução à Álgebra Linear

Kelvin Rafael Duarte Machado

agosto de 2025

Capítulo 1

Introdução

Esta apostila foi escrita com o objetivo de servir como guia de revisão do conteúdo de Álgebra Linear. O propósito foi tomar definições de forma rigorosa, porém sem a preocupação em realizar provas e demonstrações, exceto onde julgou-se necessário para melhor clareza.

Os conteúdos aqui abordados visam servir de referência para aulas ministradas em ambiente virtual. Espera-se que após a apresentação destes conteúdos, o leitor tenha capacidade de acompanhar outros cursos que façam uso da álgebra linear, como aplicações na mecânica, engenharia, física e computação.

Para a confecção da apostila foi utilizado um editor de texto em L^AT_EX.

Quaisquer dúvidas, sugestões ou críticas, entre em contato através do email:

kellyn@kellynrafael.com.

Kelvin Rafael Duarte Machado
Santa Maria, agosto de 2025.

Capítulo 2

Espaço vetorial

2.1 Definição de espaço vetorial

Um *espaço vetorial* E é um conjunto cujos elementos são chamados de *vetores*, no qual são definidas duas operações: a *adição*, na qual para cada par de vetores u e v faz corresponder um terceiro vetor $u + v \in E$ chamado soma de u e v e a *multiplicação* por um número real, $\alpha \in \mathbb{R}$ por $v \in E$, que faz corresponder o vetor $\alpha.v = \alpha v$. Essas operações devem satisfazer para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, os axiomas apresentados a seguir:

- **comutatividade:** $u + v = v + u$;
- **associatividade:** $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- **vetor nulo:** existe um vetor $0 \in E$ chamado vetor nulo, ou vetor zero, tal que $v + 0 = 0 + v = v$ para quaisquer $v \in E$;
- **inverso aditivo:** dado um vetor $v \in E$, existe um vetor $-v \in E$, tal que $-v + v = v + (-v) = 0$;
- **distributividade:** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ e $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
- **multiplicação por 1:** $1.v = v$.

2.2 Subespaço vetorial

Um subespaço de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:

- $0 \in F$;
- Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;
- Se $v \in F$, então para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Capítulo 3

Bases

3.1 Combinação linear

Uma combinação linear de um conjunto de vetores $v_1, \dots, v_n$ em V é um vetor na forma:

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

Onde: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

3.2 Subespaço gerador de E

O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, \dots, v_n$ em V é chamado de subespaço gerador de V ou, span de V , denotado por $S(v_1, \dots, v_m)$. Em outras palavras:

$$S(v_1, \dots, v_m) = \{a_1v_1 + \dots + a_mv_m : a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}$$

3.3 Vetores linearmente independentes

Seja E um espaço vetorial. Diz-se que um conjunto $X \subset E$ é linearmente independente (LI), quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X .

Se um conjunto X é linearmente independente no espaço E e $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m = 0$ com $v_1, \dots, v_m \in X$ então $\alpha_1, \dots, \alpha_m = 0$.

Sejam $v_1, \dots, v_m$ vetores não nulos do espaço vetorial E . Se nenhum deles é combinação linear dos anteriores ou posteriores, então o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é L.I..

3.4 Base

Uma base de um espaço vetorial E é um conjunto $B \subset E$ linearmente independente que gera E .

Assim, todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear $v = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m$ de elementos $v_1, \dots, v_m$ da base B . Se $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ é uma base de E e $v = \alpha_1v_1 + \dots + \alpha_mv_m$, então os números $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são chamados *coordenadas do vetor v na base B* .

3.4.1 Base canônica

Os vetores:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

Constituem um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^n$, linearmente independentes, sendo, portanto, uma base deste espaço.

3.5 Dimensão

Diz-se que o espaço vetorial E tem dimensão finita quando admite uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E , chama-se a dimensão do espaço vetorial E : $n = \dim E$.

Capítulo 4

Transformações lineares

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma transformação linear $A : E \rightarrow F$ é uma correspondência que associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $A(v) = A \cdot v = Av \in F$ de modo que valham para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as relações:

$$A(u + v) = Au + Av,$$

$$A(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot Av$$

O vetor Av chama-se a imagem de v pela transformação A .

Capítulo 5

Núcleo e imagem

A imagem de A é o subconjunto $Im(A) \subset F$, formado por todos os vetores $w = Av \in F$ que são imagens de elementos de E pela transformação A .

O núcleo da transformação $A : E \rightarrow F$ é o subconjunto $N(A)$ dos vetores $v \in E$ tais que $Av = 0$.

Capítulo 6

Produto interno

Produto interno é uma função $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par de vetores $u, v \in E$ um número real $\langle u, v \rangle$, chamado de produto interno de u por v .

- **bilinearidade:** $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$
- **comutatividade:** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- **positividade:** $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$.

O número não negativo $|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ chama-se norma ou o comprimento do vetor u .

Quando $|u| = 1$ diz que o vetor $u \in E$ é um vetor unitário.

Seja $E = C^0([a, b])$ o espaço vetorial cujos elementos são as funções contínuas $g, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Um produto interno em E pode ser definido pondo:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Neste caso, a norma da função é:

$$|f| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

Capítulo 7

Adjunta

A adjunta de A deve ser uma transformação linear $A^* : F \rightarrow E$ tal que, para $v \in E$ e $w \in F$ quaisquer se tenha:

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$$

Capítulo 8

Subespaços invariantes

Diz-se que um subespaço vetorial $F \subset E$ é invariante pelo operador $A : E \rightarrow E$ quando $A(F) \subset F$, isto é, quando a imagem de qualquer vetor $v \in F$ é ainda um vetor em F .

Um vetor $v \neq 0$ em E chama-se um autovetor do operador $A : E \rightarrow E$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$Av = \lambda v$$

O número $\lambda \in \mathbb{R}$ por sua vez, chama-se autovalor do operador A quando existe um vetor não nulo $v \in E$ tal que $Av = \lambda v$.

Capítulo 9

Operadores auto-adjuntos

Um operador linear $A : E \rightarrow E$, em um subespaço vetorial munido de produto interno, chama-se auto-adjunto quando $A = A^*$, ou seja, quando $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para quaisquer $u, v \in E$.

Capítulo 10

Operadores ortogonais

Dada uma matriz $\mathbf{u} \in M(m \times n)$ cujas n colunas formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}$, chama-se uma matriz ortogonal.

Capítulo 11

Operadores normais

Um operador linear $A : E \rightarrow E$ chama-se normal quando comuta com seu adjunto. Isto é, quando $AA^* = A^*A$.

Capítulo 12

Formas quadráticas

DEFINIR.

Capítulo 13

Determinantes

DEFINIR.

Capítulo 14

Polinômio característico

DEFINIR.

Capítulo 15

Espaços vetoriais complexos

DEFINIR.

Capítulo 16

Métodos numéricos

DEFINIR.